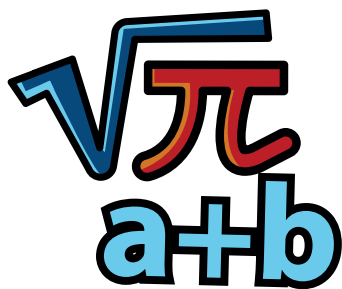


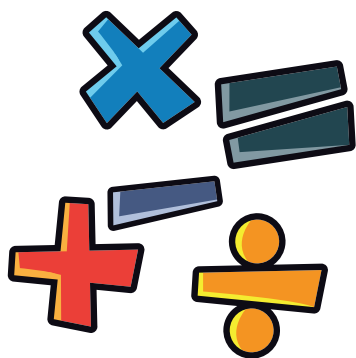
Potències i arrels

Maths



Continguts teòrics
i exemples

Edita: Balàgium Editors, SL
info@balagium.com
www.balagium.com



Edició: Octubre 2015
ISBN: 978-84-15184-48-5
Dipòsit legal: L-1431-2015

Disseny cobertes
i maquetació: Jordi Prió Burgués

© Balàgium Editors, SL

Reservats tots els drets.

Tots els dossiers que estiguin en format PDF gratuït es podran projectar a l'aula i fer-ne fotocòpies per a l'alumnat sempre i quan s'indiqui la seva pertinença al projecte Maths.

Tot i que és possible fotocopiar tot els dossiers, es recomana comprar-los perquè resulta més econòmic i, alhora, es contribueix a desenvolupar altruisment el projecte *Maths*.

Potències i arrels

Potències	2
Concepte	2
Potències de base 10	3
Potències de base 2	3
Casos particulars	3
Potències de nombres enters	4
La potenciació no és commutativa	4
Propietats de potències amb la mateixa base	5
Producte	5
Divisió	5
Potència d'una potència	6
La notació científica	8
Propietats distributives de les potències	9
Respecte al producte	9
Respecte a la divisió	9
Respecte a la suma	10
Exemples d'operacions combinades	11
Potències amb la mateixa base	11
Potències amb bases diferents	12
Arrels	14
Concepte	14
Arrels equivalents	16
Propietats dels radicals	18
Producte	18
Quocient	18
Arrel d'una arrel	19
Operacions amb radicals	19
Extracció de factors fora del radical	19
Entrada de factors dins del radical	20
Suma i resta	20
Racionalització	21
Ús de la calculadora	22
Taula de fórmules	24

2 Propietats de potències amb la mateixa base

Aquestes operacions serveixen per simplificar i expressar el resultat mitjançant una sola potència.

1 Producte

p1

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Se sumen els exponents

$$2^3 \cdot 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$$

Diagram illustrating the multiplication of powers with the same base. The exponents 3 and 5 are added to get 8. The product is shown as a sequence of 8 twos, which is then simplified to 2^8 .

2 Divisió

p2

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Es resten els exponents

$$2^7 : 2^4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^3$$

Diagram illustrating the division of powers with the same base. The exponents 7 and 4 are subtracted to get 3. The result is shown as a sequence of 3 twos, which is then simplified to 2^3 . The text "Simplifiquem" (Simplify) is written below the fraction.

$$2^4 : 2^7 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$$

Diagram illustrating the division of powers with the same base. The exponents 4 and 7 are subtracted to get -3. The result is shown as a fraction with 1 in the numerator and 2^3 in the denominator, which is then simplified to 2^{-3} .

a

p3

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

i

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

Una potència amb exponent negatiu representa aquesta potència amb l'exponent positiu al denominador d'una fracció.

Quan una potència canvia del numerador al denominador o viceversa, l'exponent canvia de signe.

4

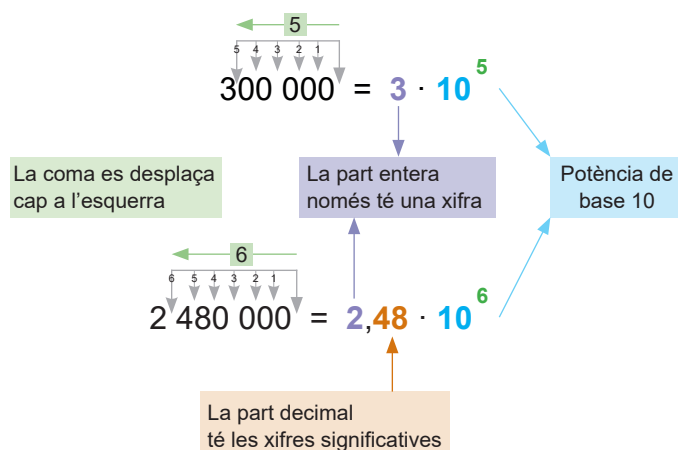
La notació científica

La notació científica és una manera d'anotar nombres per mitjà de *potències de base 10*.

Aquesta notació s'utilitza per expressar nombres molt grans o molt petits.

Un nombre expressat en notació científica consta d'**una part entera**, **una decimal** i **una potència de base 10**.

a Potències d'exponent positiu



L'estrella més propera al Sol, Alfa de Centaure, es troba a una distància de $4,13 \cdot 10^{13}$ km.

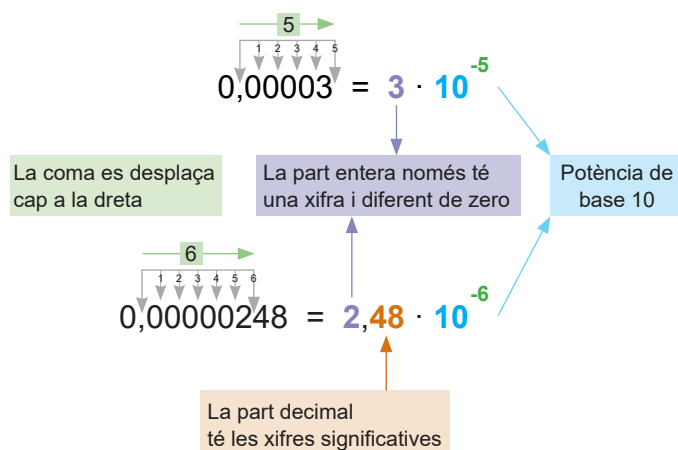
A La Terra hi ha aproximadament unes $7 \cdot 10^9$ persones.

A la nostra galàxia, la Via Làctia, hi ha unes $3 \cdot 10^{11}$ estrelles.

La distància als confins observables de l'Univers és d'uns $4,6 \cdot 10^{26}$ m.

Els dinosaures es varen extingir fa uns $6 \cdot 10^6$ anys.

b Potències d'exponent negatiu



La massa de l'àtom d'hidrogen és $1,66 \cdot 10^{-24}$ grams.

Els temps que tarda la llum a recórrer un 1 km és de $3,3 \cdot 10^{-6}$ segons.

Un àngstrom (Å) és una unitat de longitud equivalent a 10^{-10} metres.

La constant de Planck (física fonamental) caracteritza la quantització de la natura i és igual $6,623 \cdot 10^{-34}$ kg·m²/s.

Prefixos submúltiples del Sistema Internacional

deci	d	10^{-1}	nano	n	10^{-9}	zepto	z	10^{-21}
centi	c	10^{-2}	pico	p	10^{-12}	yocto	y	10^{-24}
mili	m	10^{-3}	femto	f	10^{-15}			
micro	μ	10^{-6}	atto	a	10^{-18}			

b

p6 $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Una fracció amb exponent negatiu és igual a la fracció inversa amb l'exponent positiu.

La justificació es troba en l'apartat a de la pàgina anterior.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{2^{-3}}{5^{-3}} = \frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$$

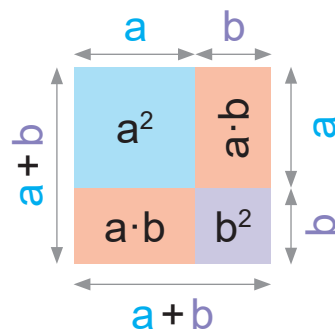
El signe de l'exponent es canvia quan una potència passa del numerador al denominador o viceversa.

3 Respecte a la suma

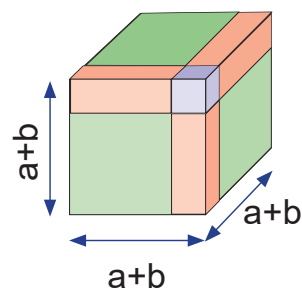
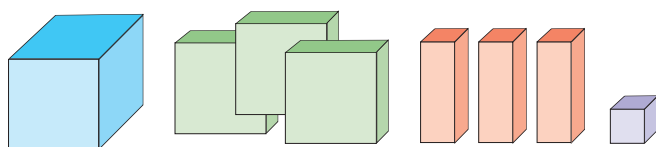
$$(a + b)^n \neq a^n + b^n$$

No es compleix ni per a la suma ni per a la resta. Els dos exemples següents ho justifiquen.

a $(a + b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) =$
 $= a^2 + 2ab + b^2$



b $(a + b)^3 = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) =$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



4 Exemples d'operacions combinades

1 Potències amb la mateixa base

a

$$2^3 \cdot (2^5)^3 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot (2^4)^2 = 2^{3+4+1} \cdot 2^{5 \cdot 3} \cdot 2^{4 \cdot 2} = 2^{8+15+8} = 2^{31}$$

se sumen els exponents

Cal fixar-se que l'exponent és un 1

Es multipliquen els exponents dels parèntesis

Se sumen els exponents

b

$$3^3 \cdot 9^4 \cdot 3^2 \cdot 27^2 \cdot 3^5 = 3^{3+2+5} \cdot (3^2)^4 \cdot (3^3)^2 = 3^{10} \cdot 3^8 \cdot 3^6 = 3^{24}$$

se sumen els exponents

9 i 27 es poden posar com a potències de base 3

Es multipliquen els exponents dels parèntesis

Se sumen els exponents

c

$$\frac{5^2 \cdot (5^3)^4 \cdot 5^3}{5^7 \cdot 5 \cdot (5^2)^3} = \frac{5^{2+3} \cdot 5^{3 \cdot 4}}{5^{7+1} \cdot 5^{2 \cdot 3}} = \frac{5^{5+12}}{5^{8+6}} = \frac{5^{17}}{5^{14}} = 5^{17-14} = 5^3$$

Es multipliquen els exponents dels parèntesis

Se sumen els exponents

Es resten els exponents

d

$$\frac{4^5 \cdot (2^3)^4 \cdot 16^3}{2 \cdot 2^7 \cdot (2^5)^6} = \frac{(2^2)^5 \cdot 2^{3 \cdot 4} \cdot (2^4)^3}{2^{1+7} \cdot 2^{5 \cdot 6}} = \frac{2^{10+12+12}}{2^{8+30}} = \frac{2^{34}}{2^{38}} = 2^{34-38} = 2^{-4}$$

4 i 16 es poden posar com a potències de base 2

Es multipliquen els exponents dels parèntesis

Se sumen els exponents

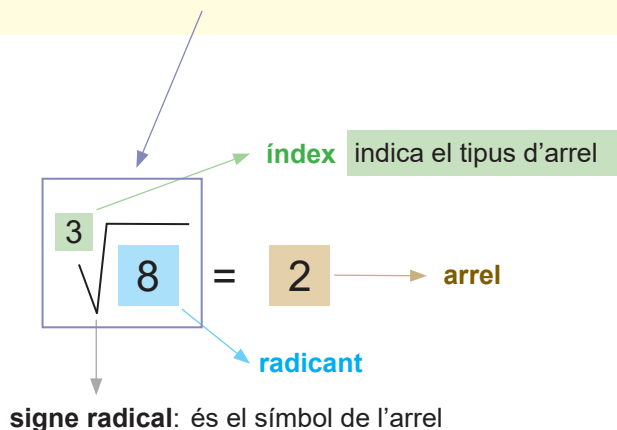
Es resten els exponents

5 Arrels

1 Concepte

L'**arrel** d'un nombre és l'operació inversa d'eleva un nombre.

S'anomena **radical** l'expressió enquadrada en blau.



Es llegeix

“arrel cúbica de 8”

a

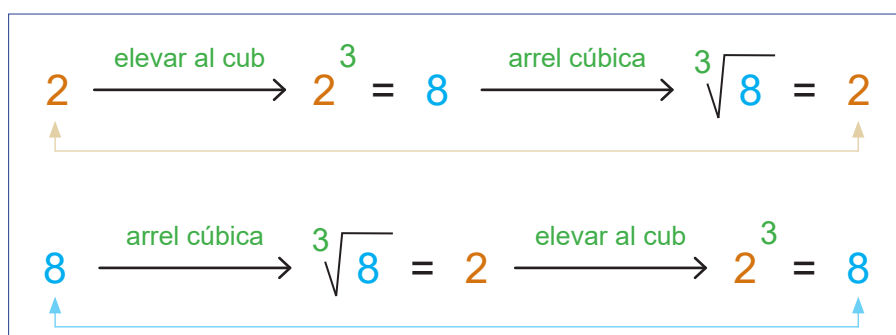
d1

$$\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$$

definició

Una expressió amb un radical es pot escriure mitjançant potències.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \iff 8 = 2^3$$



b Tipus d'arrel

$$\sqrt{a}$$

arrel quadrada
(quan l'índex és 2, no s'indica)

$$\sqrt[3]{a}$$

arrel cúbica

$$\sqrt[4]{a}$$

arrel quarta

Les arrels següents s'anomenen cinquena, sisena, setena, vuitena, novena, desena, etc.

3 Arrel d'una arrel

r7

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[3]{2^{\frac{1}{5}}} = \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{15}} = \sqrt[15]{2}$$

Per definició Per definició Producte d'exponents Per definició

Equival a multiplicar els índexs dels radicals.

7 Operacions amb radicals

Aquestes operacions serveixen tant per agrupar radicals com per descompondre'ls.

1 Extracció de factors fora del radical

Quan una potència té l'exponent més gran o igual que l'índex del radical, es pot treure una part de la potència fora del radical.

a

$$\sqrt[3]{7^5} = \sqrt[3]{7^{3 \cdot 1 + 2}} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 7^2} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{7^2} = 7 \cdot \sqrt[3]{7^2}$$

Veure divisió (dreta) Suma d'exponents Producte radicals (mateix índex) Simplificació radicals

Amb una arrel cúbica, cada tres 7 en pot sortir un fora de l'arrel

$5 = 3 \cdot 1 + 2$

b

$$\sqrt{3^9} = \sqrt{3^{2 \cdot 4 + 1}} = \sqrt{3^8 \cdot 3^1} = \sqrt{(3^4)^2 \cdot 3^1} = 3^2 \cdot \sqrt{3^1} = 9 \cdot \sqrt{3}$$

Índex 2 Veure divisió (dreta) Suma d'exponents Producte radicals (mateix índex) Simplificació radicals Exponent 1

Amb una arrel quadrada, cada dos 3 en pot sortir un fora de l'arrel

$9 = 2 \cdot 4 + 1$

c

$$\sqrt[5]{2^{19} \cdot 3^7 \cdot 5^3} = \sqrt[5]{2^{15} \cdot 2^4 \cdot 3^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3} = 2^3 \cdot 3 \cdot \sqrt[5]{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3}$$

Producte potències (mateixa base) Simplificació radicals Exponent 1

3 és més petit que 5

$19 = 5 \cdot 3 + 4$
 $7 = 5 \cdot 1 + 2$
 $3 = 5 \cdot 0 + 3$

8 Ús de la calculadora

Les actuals calculadores científiques disposen d'una pantalla que permet l'escriptura matemàtica. En canvi, en les més antigues o en les més senzilles aquesta opció no és possible.

Símbols de les funcions, representades a les tecles, per calcular

1 Potències a^n	x^2 Elevar al quadrat	x^3 Elevar al cub	x^y $^{\wedge}$ Elevar a qualsevol exponent	$x^{\square}$ $\square$ (Destacades amb una línia vermella)
2 Arrels $\sqrt[n]{}$	$\sqrt{}$ Arrel quadrada	$\sqrt[3]{}$ Arrel cúbica	$x^{\sqrt{}}$ $x^{1/y}$ $y^{\sqrt{}}$ Arrel amb qualsevol exponent	$\sqrt{}$ $\square$ (Destacades amb una línia vermella)
3 Notació científica $a \cdot 10^n$	EXP Per introduir l'exponent de la potència de base 10	$\times 10^x$	$+/-$ $(-)$ Per introduir el signe negatiu a l'exponent	(Destacades amb una línia vermella)

Tecles de calculadores amb escriptura matemàtica

Algunes tecles poden executar més d'una funció.
Aquestes agrupacions de funcions i de distribució depenen de cada calculadora.

Sense escriptura matemàtica

1a funció: Clicant la tecla x^y x^y

2a funció: Clicant les tecles **INV** x^y x^y

Amb escriptura matemàtica

1a funció: Clicant la tecla $\sqrt{x}$

2a funció: Clicant les tecles **SHIFT** $\sqrt{x}$

1 Potències

$$2^2 \rightarrow 2 \times^2 \rightarrow 4$$

$$2^3 \rightarrow 2 \times^3 \rightarrow 8$$

$$3^5 \rightarrow 3 \times^y 5 = \rightarrow 243$$

$$2^9 \rightarrow 2 \wedge 9 = \rightarrow 512$$

$$4^5 \rightarrow 4 \times^4 5 = \rightarrow 1024$$

2 Arrels

En calculadores antigues

$$\sqrt{25} \rightarrow 25 \sqrt{} \rightarrow 5$$

$$\sqrt[3]{64} \rightarrow \sqrt[3]{} 64 = \rightarrow 4$$

L'arrel cúbica es troba com 2a funció

SHIFT o INV

$\sqrt[3]{}$ $\sqrt{}$ $+/-$

$$\sqrt[5]{32} \rightarrow 5 \sqrt[x]{} 32 = \rightarrow 2$$

$$\sqrt[5]{32} \rightarrow 32 \sqrt[y]{} 5 = \rightarrow 2$$

$$\sqrt[5]{32} \rightarrow \sqrt[x]{} 5 \rightarrow 32 = \rightarrow 2$$

Tecla dels cursors

$$32^{\frac{1}{5}} \rightarrow 32 \times^y 5 \text{ 1/x } = \rightarrow 2$$

Introducció d'una fracció

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}} \rightarrow \sqrt[x]{} 4 \rightarrow \frac{\square}{\square} 81 \blacktriangledown 16 = \rightarrow \frac{3}{2}$$

3 Notació científica

$$3,456 \cdot 10^8 \rightarrow 3.456 \text{ EXP } 8$$

$$3,456 \cdot 10^8 \rightarrow 3.456 \times 10^8$$

Per indicar la coma decimal a les calculadores s'utilitza la tecla $\cdot$

$$7,03 \cdot 10^{-9} \rightarrow 7.03 \text{ EXP } 9 \text{ +/-}$$

$$7,03 \cdot 10^{-9} \rightarrow 7.03 \times 10^9 \text{ (-)}$$

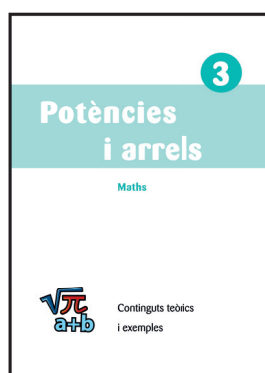


Continguts secundària

Els continguts de l'ESO s'agrupen en les 10 temàtiques següents.

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 1 Els nombres | 6 Magnituds i mesura |
| 2 Fraccions i proporcionalitat | 7 Geometria |
| 3 Potències i arrels | 8 Semblança i trigonometria |
| 4 Àlgebra | 9 Estadística |
| 5 Funcions | 10 Probabilitat |

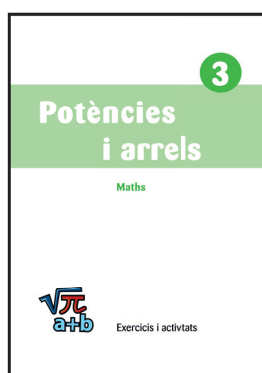
Cada una d'aquestes temàtiques presenta tres dossiers: un de teoria i exemples, un altre d'exercicis i activitats i, un tercer, amb la guia didàctica i solucionari.



Disponibles en format imprès a preu gairebé de cost.

Amb els beneficis s'anirà desenvolupant tot el projecte altruista Maths, especialment, els **multimèdia interactius**, d'accés lliure.

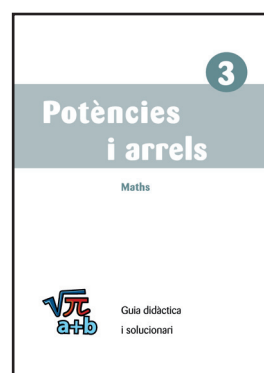
Una vegada aquests multimèdia estiguin acabats, els dossiers de teoria també estaran disponibles en PDF gratuït.



Disponibles **gratuïtament** des de la seva publicació en format PDF.

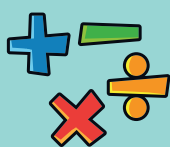
Amb la col·laboració altruista del professorat, aportant suggeriments, exercicis i activitats, s'aniran realitzant, actualitzant i ampliant els dossiers d'exercicis i activitats i les guies didàctiques.

En cada exercici i activitat se citarà l'autoria del professorat i/o centre educatiu col·laborador que ens l'hagi proporcionat.



Per a ampliar la informació del projecte i descarregar els PDF gratuïts, visiteu www.balagium.com

Maths



Primària
(6 - 12 anys)



Secundària
(12 - 16 anys)



Batxillerat
(16 - 18 anys)

La col·lecció Maths està formada per una sèrie de dossiers per a les etapes de primària, secundària i batxillerat.

Aquests materials pretenen, entre altres objectius, fomentar l'interès per les matemàtiques, millorar la capacitat de raonament i la resolució de problemes, potenciar l'agilitat mental, descobrir el goig intel·lectual.

En els dossiers de continguts teòrics s'utilitza una metodologia molt visual, estructurada i senzilla per afavorir-ne la comprensió. En cada dossier s'agrupen els continguts teòrics corresponents a tota l'etapa escolar. Això possibilita una consulta ràpida dels seus continguts, redueix el temps per al seu aprenentatge i així tenir-ne més per a treballar activitats competencials.

En els dossiers d'exercicis i activitats, se'n presenten tres tipologies diferents: els habituals per treballar cada concepte, miniactivitats transversals basades en la resolució de problemes relacionats amb la vida quotidiana i projectes per afavorir un aprenentatge competencial. Cada una d'aquestes tipologies permet atendre la diversitat de l'alumnat per tal de motivar-lo i fomentar la seva autoestima.

Aquests dossiers es poden reutilitzar i redueixen significament els costos econòmics dels llibres escolars.

Codificació
continguts



Més bàsic



Més complex



BALÀGIUM
editors



9 788415 184485