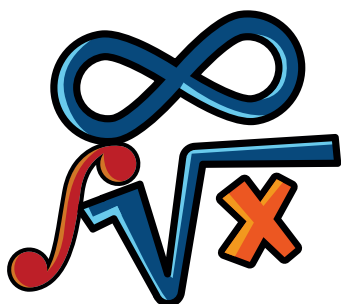


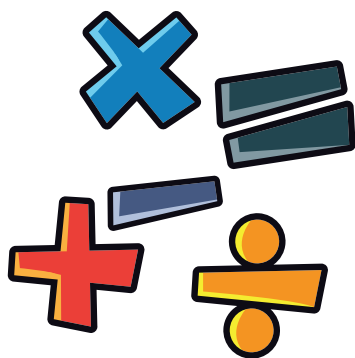
Funcions

Maths



Continguts teòrics
i exemples

Edita: Balàgium Editors, SL
info@balagium.com
www.balagium.com



Edició: Octubre 2018
ISBN: 978-84-17431-08-2
Dipòsit legal: L-1202-2018

Disseny cobertes
i maquetació: Jordi Prió Burgués

© Balàgium Editors, SL

Reservats tots els drets.

Tots els dossiers que estiguin en format PDF gratuït es podran projectar a l'aula i fer-ne fotocòpies per a l'alumnat sempre i quan s'indiqui la seva pertinença al projecte Maths.

Tot i que és possible fotocopiar tot els dossiers, es recomana comprar-los perquè resulta més econòmic i, alhora, es contribueix a desenvolupar altruisment el projecte *Maths*.

Funcions

Introducció	2
Concepte	2
Formes de definir una funció	3
Domini i recorregut	4
Tipus de funcions	5
Funcions algebraiques.....	5
Funcions transcendents.....	7
Funcions definides a trossos	8
Operacions amb funcions	11
Operacions algebraiques.....	11
Composició de funcions.....	12
Funció recíproca o inversa	14
Transformacions de funcions.....	16
Propietats de les funcions	19
Simetria	19
Periodicitat.....	20
Continuïtat	20
Característiques de les funcions	21
Punts de tall amb els eixos	21
Signe d'una funció	21
Monotonia.....	22
Extrems	22
Curvatura.....	23
Punts d'inflexió.....	23
Interpolació	24
Lineal.....	25
Quadràtica	26
Recursos gràfics. Geogebra	27
Mapa mental	28

1 Introducció

1

Una **magnitud** és una propietat física que pot ser observada i mesurada.

Les magnituds poden ser constants (com, per exemple, la velocitat de la llum) o **variables** en el cas que depenguin d'altres magnituds.

A partir de la necessitat de relacionar aquestes magnituds entre elles va sorgir el concepte de funció. Aquestes magnituds es poden trobar en diversos àmbits: científic, econòmic, sociològic...

En aquest dossier s'analitzaran les relacions entre magnituds numèriques. I aquests valors numèrics poden ser qualsevol **nombre real**.

Una primera idea intuïtiva de funció ja la va mencionar Oresme l'any 1350.

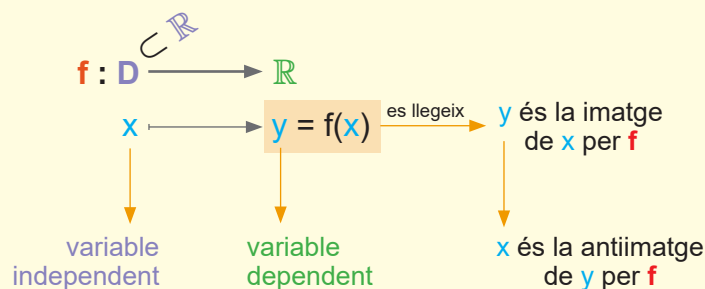
Més endavant, Galileu va establir relacions numèriques a partir de l'experimentació quantitativa.

Leibniz, Bernoulli i finalment Euler van formular l'actual concepte de funció i la notació de $f(x)$.

A partir del concepte de funció es construeix l'anàlisi matemàtica, una de les parts importants de les branques que estudien les matemàtiques.

Definició

Una funció **real** f de variable **real** és una relació que associa a cada nombre real $x \in D \subset \mathbb{R}$, un **únic** nombre $y \in \mathbb{R} / y = f(x)$.



En les pàgines 12 i 13 del dossier 12 (*Conjunts i estructures*, d'aquesta col·lecció *Maths*), s'expliquen les definicions de correspondència i aplicació, les quals constitueixen la base conceptual per entendre la definició de funció.

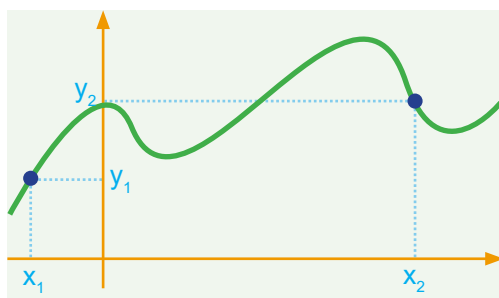
Les **successions** són funcions **reals** de variable **natural**.

$$s: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto a_n$$

Exemples

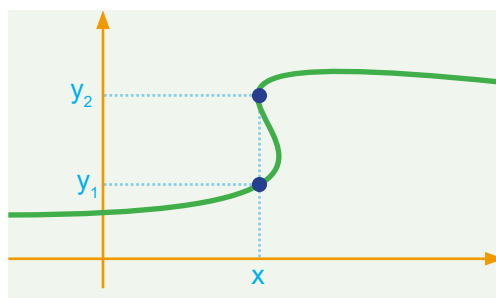
a És una funció.



Cada valor de la variable independent (abscissa) només es relaciona amb un valor de la variable dependent (ordenada).

És a dir, qualsevol línia vertical només pot tallar la gràfica en un punt.

b No és una funció (és una correspondència).



Hi ha alguns valors de la variable independent (abscissa) que es relacionen amb més d'un valor de la variable dependent (ordenada).

És a dir, hi ha línies verticals que tallen la gràfica en més d'un punt.

c Valor absolut

El valor absolut canvia de signe els resultats negatius de $f(x)$ i deixa igual els positius.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

El domini és el mateix que el de l'expressió analítica sense valor absolut.

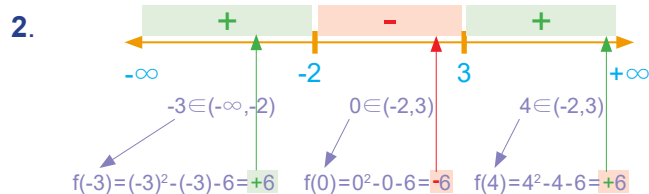
El valor absolut dona lloc a dos tipus de trams. Un per als valors en què $f(x)$ dona positiu i l'altre per als de resultat negatiu.

Lineal	Quadràtica	Trigonomètrica
$f(x) = x - 2 $	$f(x) = x^2 - x - 6 $	$f(x) = \sin x $
$f(x) = \begin{cases} x-2 & , x \geq 2 \\ -(x-2) & , x < 2 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & , x \geq 3 \\ -(x^2 - x - 6) & , -2 < x < 3 \\ x^2 - x - 6 & , x \leq -2 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \sin x & , -2\pi \leq x \leq -\pi \\ -\sin x & , -\pi < x < 0 \\ \sin x & , 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x & , \pi < x < 2\pi \\ \dots \end{cases}$
Dom $f(x) = \mathbb{R}$ Im $f(x) = [0, +\infty]$	Dom $f(x) = \mathbb{R}$ Im $f(x) = [0, +\infty]$	Dom $f(x) = \mathbb{R}$ Im $f(x) = [0, 1]$

Exemple

$$f(x) = |x^2 - x - 6|$$

$$1. f(x) = 0 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x_1 = -2 \text{ i } x_2 = 3$$



3. i 4. Estan indicats en l'exemple de la 2a columna.

Procediment de transformació d'una funció amb valor absolut a una de trossos (sense els símbols de valor absolut):

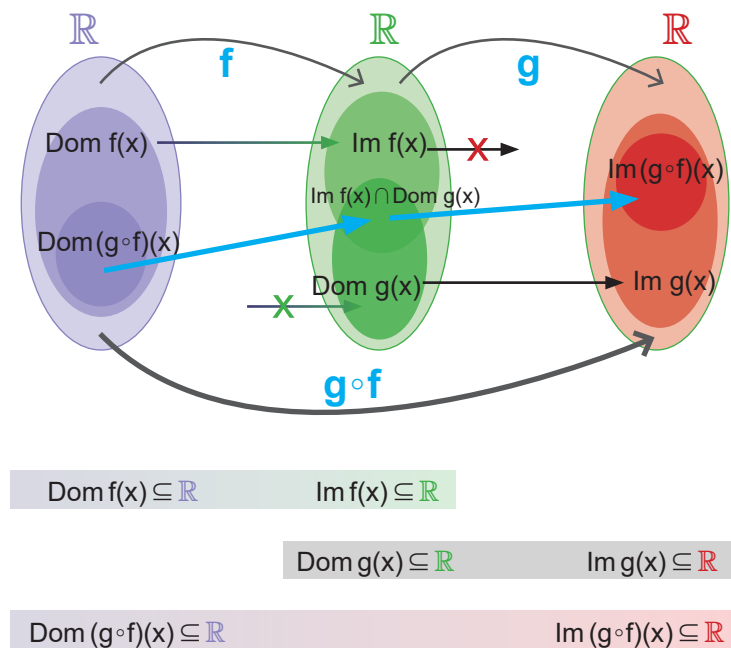
1. S'iguala a zero la funció, sense el valor absolut, i es calculen les seves arrels.
2. Es formen els intervals amb les arrels i s'avalua el signe de cada interval.
3. Es defineix la funció a trossos. En els intervals on les imatges de la funció donen negatives, se'n canvia el signe.
4. Es representa la gràfica de cada tram.

2 Composició de funcions

Mitjançant la composició de funcions se'n generen una multitud de funcions més complexes, que s'anomenen funcions *compostes*.

Donades les funcions **f** i **g** s'anomena *funció composta* de **g** respecte a **f** a **$g \circ f$** en què

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Funció **identitat**: $I(x)=x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Propietats de la composició:

- És **associativa**:
 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- **$I(x)$** és l'element neutre:
 $I \circ f = f \circ I = f$
- **No és commutativa**:
 $g \circ f \neq f \circ g$

Sovint no tots els nombres de la $\text{Im } f(x)$ també estan en el $\text{Dom } g(x)$ en $\mathbb{R}$. En aquests casos:

- Hi ha nombres de la $\text{Im } f(x)$ que no tenen imatge a $\mathbb{R}$ per **g**.
- Hi ha nombres del $\text{Dom } g(x)$ que no són imatge de cap nombre de $\mathbb{R}$ per **f**.

Per tant, només els nombres de $\mathbb{R}$ que estan a **$\text{Im } f(x) \cap \text{Dom } g(x)$** tenen imatge a $\mathbb{R}$ per **g** i són ara imatge d'un nombre de $\mathbb{R}$ per **f**.

A partir d'aquest conjunt es poden trobar (indicat per fletxes blaves):

$$\text{Dom } (g \circ f)(x) \subseteq \text{Dom } f(x)$$

$$\text{Im } (g \circ f)(x) \subseteq \text{Im } g(x)$$

Exemples

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sin x$$

$$\text{Dom } g(x) = \mathbb{R}$$

$$h(x) = e^x$$

$$\text{Dom } h(x) = \mathbb{R}$$

$$i(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{Dom } i(x) = [0, +\infty)$$

a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x - 3) = \sin(x^2 + 2x - 3)$

$$\text{Dom } (g \circ f)(x) = \mathbb{R}$$

b $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sin x) = e^{\sin x}$

$$\text{Dom } (h \circ g)(x) = \mathbb{R}$$

c $(g \circ i)(x) = g(i(x)) = g(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x})$

$$\text{Dom } (g \circ i)(x) = [0, +\infty)$$

d $(i \circ g)(x) = i(g(x)) = i(\sin x) = \sqrt{\sin x}$

$$\text{Dom } (i \circ g)(x) = \dots [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \dots$$

e $(i \circ f)(x) = i(f(x)) = i(x^2 + 2x - 3) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

$$\text{Dom } (i \circ f)(x) = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

f $(g \circ i \circ h)(x) = g(i(h(x))) = g(i(e^x)) = g(\sqrt{e^x}) = \sin(\sqrt{e^x})$

$$\text{Dom } (g \circ i \circ h)(x) = \mathbb{R} \text{ perquè } e^x > 0$$

Una funció composta es pot descompondre en dues o més funcions elementals si es fa el procés invers mostrat als exemples anteriors.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y)$$

Funció més aprop de l'argument x → 1a funció que actua → L'expressió analítica de 1a funció és l'argument de la 2a funció que actua

Exemples de funcions compostes de potències amb trigonòmiques i logarítmiques ($h=g \circ f$):

- $h(x) = \sin^3 x \rightarrow h(x) = (\sin x)^3$
 $g(x) = x^3$ i $f(x) = \sin x$
- $h(x) = \sin x^3 \rightarrow h(x) = \sin(x^3)$
 $g(x) = \sin x$ i $f(x) = x^3$

El quadre següent resumeix com es poden calcular els dominis de funcions compostes senzilles:

a	$f(x) = p(x)$	Dom $f(x) = \mathbb{R}$
b	$f(x) = p(x) / q(x)$	Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{x, q(x)=0\}$
c	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$n = \text{senar} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \text{Dom } g(x)$ $n = \text{parell} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \{x, g(x) \geq 0\}$
d	$f(x) = a^{g(x)}$	Dom $f(x) = \text{Dom } g(x)$
e	$f(x) = \log_a(g(x))$	Dom $f(x) = \{x, g(x) > 0\}$
f	$f(x) = \sin(g(x))$ $f(x) = \cos(g(x))$	Dom $f(x) = \text{Dom } g(x)$
g	$f(x) = \text{tg}(g(x))$	Dom $f(x) = \text{Dom } g(x) - \{x, g(x)=0\}$

El procediment per trobar el domini de funcions compostes consisteix, bàsicament, en resoldre:

• Equacions

Igualar a zero els denominadors de les fraccions.

Les solucions d'aquestes equacions es treuen del domini i s'indica mitjançant els símbols de conjunt $\{ \}$.

• Inequacions

El radicant d'una arrel ≥ 0 .

L'argument del logaritme > 0 .

Les solucions s'expressen mitjançant intervals que combinen els símbols $(, [,)$ i $]$ i els intervals s'uneixen amb el símbol $\cup$.

Si hi ha operacions algebraïques de funcions, s'haurà de trobar la intersecció dels seus dominis respectius (vegeu p. 11).

Exemples

a $f(x) = \frac{x^2-9}{4-x^2}$

La divisió d'un nombre per zero NO és real

$4-x^2=0$
 $x=-2$ i $x=2$

Resoldre equacions

Domini de les funcions

$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b $g(x) = \sqrt{\frac{x^2-9}{4-x^2}}$

L'arrel quadrada d'un negatiu NO és real

$\frac{x^2-9}{4-x^2} \geq 0$

Resoldre inequacions

$4-x^2=0$ i $x^2-9=0$
 $x=-2$ i $x=2$ i $x=-3$ i $x=3$

Domini de les funcions

$[-3, -2) \cup (2, 3]$

c $i(x) = \log\left(\frac{x^2-9}{4-x^2}\right)$

El logaritme d'un negatiu o de zero NO és real

$\frac{x^2-9}{4-x^2} > 0$

Resoldre inequacions

$4-x^2=0$ i $x^2-9=0$
 $x=-2$ i $x=2$ i $x=-3$ i $x=3$

Domini de les funcions

$(-3, -2) \cup (2, 3)$

d $h(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-9}{4-x^2}}$

L'arrel cúbica d'un negatiu SÍ és real

Dom $h(x) = \text{Dom } f(x)$

El domini de $f(x)$ i $h(x)$ és el mateix (el conjunt de les x que tenen imatge). Però les imatges són diferents, $f(x) \neq h(x)$.

Si $x=0 \rightarrow f(x)=-9/4$
 $h(x)=\sqrt[3]{-9/4}$
 $f(x)=g(x)$ quan $f(x)=\pm 1$.

b Expansió / compressió

Vertical $\updownarrow$

$k \cdot f(x), k > 0$

Si $k > 1 \rightarrow$ expansióSi $k < 1 \rightarrow$ compressió<https://goo.gl/XnwEaf>Horizontal $\leftrightarrow$

$f(h \cdot x), h > 0$

Si $h > 1 \rightarrow$ compressióSi $h < 1 \rightarrow$ expansió<https://goo.gl/XDziAf>

Equival a una deformació. Tots els punts de la gràfica s'expandeixen o comprimeixen en una mateixa direcció (horitzontal o vertical) respecte a l'origen de coordenades.

$k \cdot f(hx)$ representa dues deformacions (una d'horitzontal i una altra de vertical).

Lineal

$f(x) = 2x$

Quadràtica

$f(x) = x^2$

Trigonomètrica

$f(x) = \sin x$

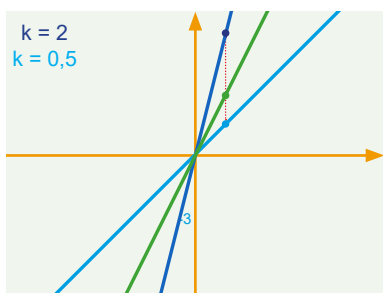
Vertical $\updownarrow$

$2 \cdot f(x) = 2 \cdot 2x = 4x$

L'expansió provoca que el pendent de la recta sigui més gran

$0,5 \cdot f(x) = 0,5 \cdot 2x = x$

La compressió ocasiona que el pendent de la recta sigui més petit

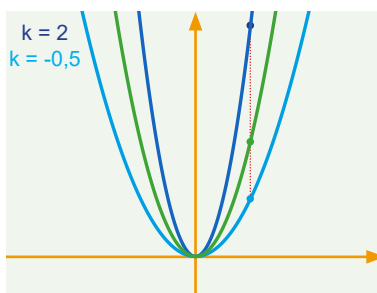


$2 \cdot f(x) = 2x^2$

L'expansió ocasiona que la paràbola sigui més estreta

$0,5 \cdot f(x) = 0,5x^2$

La compressió fa que la paràbola sigui més ampla

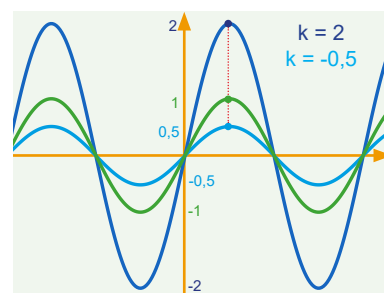


$2 \cdot f(x) = 2 \sin x$

S'expandeix el doble verticalment respecte a l'eix d'abscisses

$0,5 \cdot f(x) = 0,5 \sin x$

Es comprimeix a la meitat verticalment respecte a l'eix d'abscisses

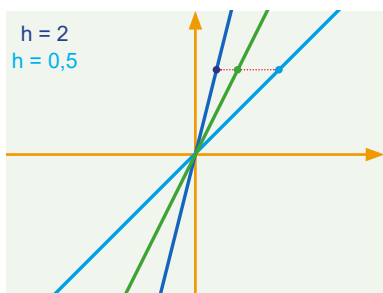
Horizontal $\leftrightarrow$

$f(2x) = 2(2x) = 4x$

La compressió fa que el pendent de la recta sigui més gran

$f(0,5x) = 2(0,5x) = x$

L'expansió provoca que el pendent de la recta sigui més petit

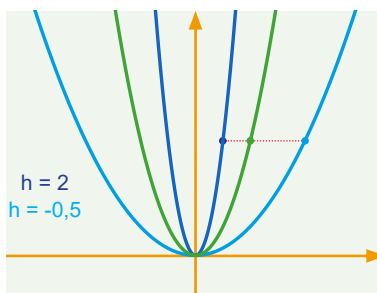


$f(2x) = 4x^2$

La compressió ocasiona que la paràbola sigui més estreta

$f(0,5x) = 0,25x^2$

L'expansió fa que la paràbola sigui més ampla

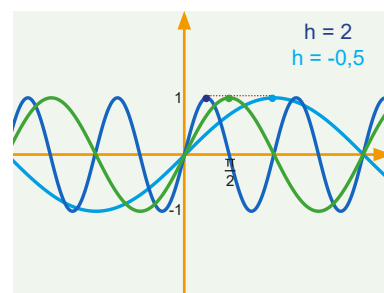


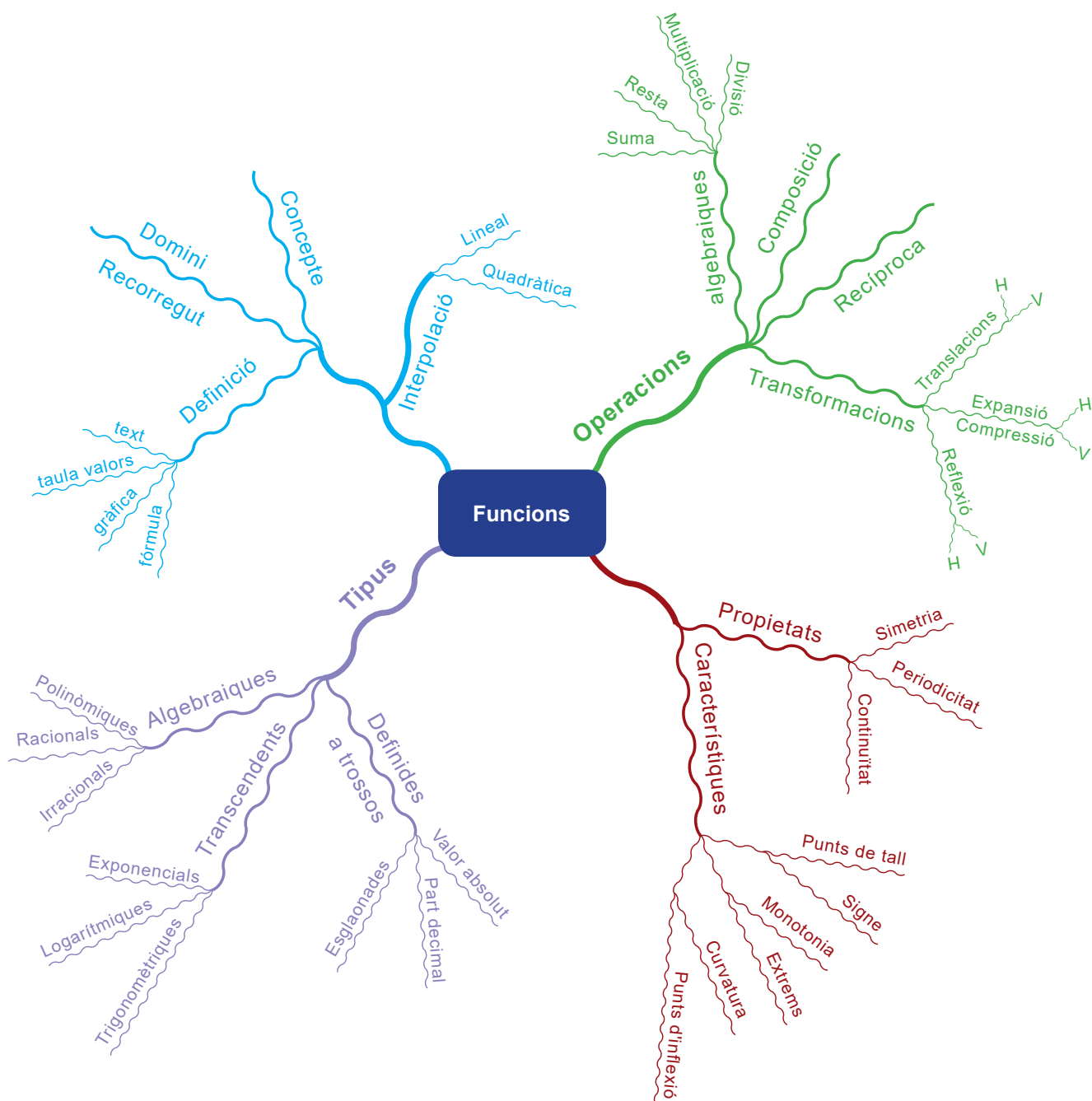
$f(2x) = \sin 2x$

Es comprimeix a la meitat horitzontalment respecte a l'eix d'ordenades

$f(0,5x) = \sin(0,5x)$

S'expandeix el doble horitzontalment respecte a l'eix d'ordenades



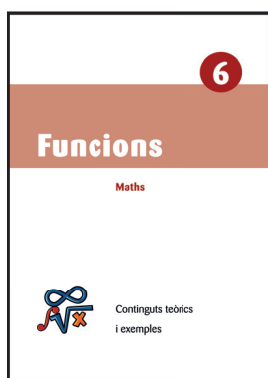




Continguts

- | | |
|------------------------|-------------------------------|
| 1 Els nombres | 8 Derivades i aplicacions |
| 2 Trigonometria | 9 Integrals |
| 3 Geometria al pla | 10 Estadística i probabilitat |
| 4 Àlgebra | 11 Resolució de problemes |
| 5 Geometria a l'espai | 12 Conjunts i estructures |
| 6 Funcions | 13 Matemàtica financera |
| 7 Límits i continuïtat | 14 Programació lineal |

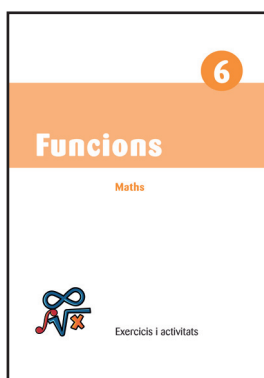
Cada una d'aquestes temàtiques presenta tres dossiers: un de teoria i exemples, un altre d'exercicis i activitats i, un tercer, amb la guia didàctica i solucionari.



Disponibles en format imprès a preu gairebé de cost.

Amb els beneficis s'anirà desenvolupant tot el projecte altruista Maths, especialment, els **multimèdia interactius**, d'accés lliure.

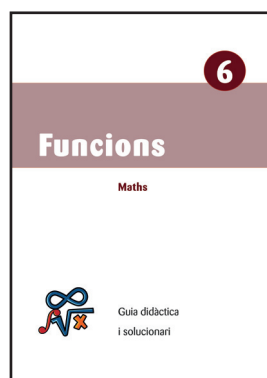
Una vegada aquests multimèdia estiguin acabats, els dossiers de teoria també estaran disponibles en PDF gratuït.



Disponibles **gratuïtament** des de la seva publicació en format PDF.

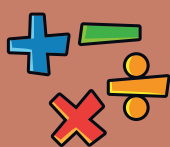
Amb la col·laboració altruista del professorat, aportant suggeriments, exercicis i activitats, s'aniran realitzant, actualitzant i ampliant els dossiers d'exercicis i activitats i les guies didàctiques.

En cada exercici i activitat se citarà l'autoria del professorat i/o centre educatiu col·laborador que ens l'hagi proporcionat.



Per a ampliar la informació del projecte i descarregar els PDF gratuïts, visiteu www.balagium.com

Maths



Primària
(6 - 12 anys)



Secundària
(12 - 16 anys)



Batxillerat
(16 - 18 anys)

La col·lecció Maths està formada per una sèrie de dossiers per a les etapes de primària, secundària i batxillerat.

Aquests materials pretenen, entre altres objectius, fomentar l'interès per les matemàtiques, millorar la capacitat de raonament i la resolució de problemes, potenciar l'agilitat mental, descobrir el goig intel·lectual.

En els dossiers de continguts teòrics s'utilitza una metodologia molt visual, estructurada i senzilla per afavorir-ne la comprensió. En cada dossier s'agrupen els continguts teòrics corresponents a tota l'etapa escolar. Això possibilita una consulta ràpida dels seus continguts, redueix el temps per al seu aprenentatge i així tenir-ne més per a treballar activitats competencials.

En els dossiers d'exercicis i activitats, se'n presenten tres tipologies diferents: els habituals per treballar cada concepte, miniactivitats transversals basades en la resolució de problemes relacionats amb la vida quotidiana i projectes per afavorir un aprenentatge competencial. Cada una d'aquestes tipologies permet atendre la diversitat de l'alumnat per tal de motivar-lo i fomentar la seva autoestima.

Aquests dossiers es poden reutilitzar i redueixen significament els costos econòmics dels llibres escolars.

Codificació
continguts



Més bàsic



Més complex



BALÀGIUM
editors