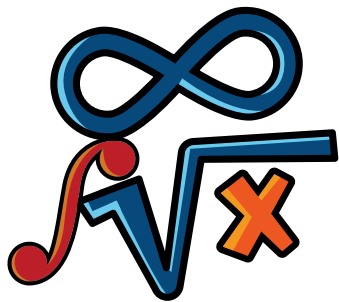


12

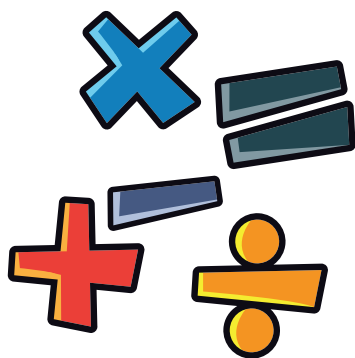
Conjunts i estructures

Maths



Continguts teòrics
i exemples

Edita: Balàgium Editors, SL
info@balagium.com
www.balagium.com



Edició:	Abril 2018
ISBN:	978-84-17431-07-5
Dipòsit legal:	L-525-2018
Disseny cobertes i maquetació:	Jordi Prió Burgués

© Balàgium Editors, SL

Reservats tots els drets.

Tots els dossiers que estiguin en format PDF gratuït es podran projectar a l'aula i fer-ne fotocòpies per a l'alumnat sempre i quan s'indiqui la seva pertinença al projecte Maths.

Tot i que és possible fotocopiar tot els dossiers, es recomana comprar-los perquè resulta més econòmic i, alhora, es contribueix a desenvolupar altruisment el projecte *Maths*.

Conjunts i estructures

Conjunts	2
Introducció	2
Subconjunts	3
Operacions amb conjunts	4
Conjunt de parts	5
Producte cartesià	6
Relació binària	7
Introducció	7
Propietats de les relacions binàries	8
Operacions amb relacions binàries	8
Relació d'equivalència	9
Relació d'ordre	10
Correspondència	12
Aplicació	13
Operació. Llei de composició	14
Definició	14
Llei de composició interna	14
Llei de composició externa	15
Conceptes algebraics	16
Introducció	16
Elements notables	16
Propietats per a una operació interna	17
Propietats per a dues operacions internes	17
Parts notables	17
Estructures algebraiques	18
Introducció	18
Estructures amb una operació interna	18
Estructures amb dues operacions internes	20
Estructures amb una operació interna i una externa	23
Mapa mental	24

1 Conjunts

1 Terme que s'utilitza per designar una col·lecció, llista o classe d'objectes.

Cada objecte d'un conjunt es denomina **element** del conjunt.

El **cardinal** d'un conjunt és el nombre d'elements d'aquest conjunt.

Un conjunt pot definir-se de dues maneres:

- Per **extensió**: s'indica cadascun dels elements que el formen:

$$C = \{ a, b, c, \dots, m \}$$

- Per **comprensió**: s'indica la propietat característica que només compleixen tots els elements del conjunt:

$$C = \{ x / x \text{ compleix la propietat } p \}$$

Si l'element a pertany al conjunt C , se simbolitza amb $a \in C$. Si a no pertany al conjunt, $a \notin C$.

Dos conjunts són **iguals** quan consten dels mateixos elements i són **equivalents** si tenen el mateix nombre d'elements.

Els conjunts es representen per lletres majúscules: $A, B, C, D, \dots$

Els elements dels conjunts es representen per mitjà de lletres minúscules: $a, b, c, d, \dots$

Un conjunt és **finit** quan el seu cardinal és un nombre natural fix.

Per exemple, els divisors de 12, els dies de la setmana, els habitants d'una població,...

Un conjunt és **infinit** quan també ho és el seu cardinal (no es pot acabar el recompte dels seus elements).

Per exemple, els nombres naturals,...

No s'ha de confondre l'element a amb el conjunt que consta d'aquest element $\{a\}$.

Exemples

a Els resultats de llançar un dau.



Diagrama lineal

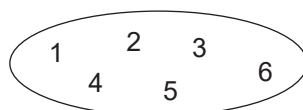


Diagrama de Venn

Els conjunts es poden representar geomètricament amb:

- **Diagrames lineals**

Els elements són punts d'una recta.

- **Diagrames de Venn**

Els elements són punts del pla i els conjunts, regions del pla.

b Els divisors de 12.

Per comprensió:

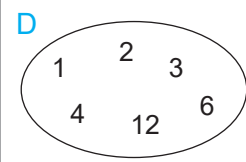
$$D = \{ x \in \mathbb{N} / x \text{ sigui divisor de } 12 \}$$

tal que

$$4 \in D, \quad 5 \notin D$$

Per extensió:

$$D = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 \}$$



c Les vocals de l'alfabet.

Per comprensió:

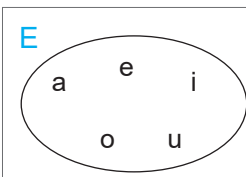
$$E = \{ \text{Les vocals} \}$$

Per extensió:

$$E = \{ a, e, i, o, u \}$$

$$e \in E$$

$$m \notin E$$



2

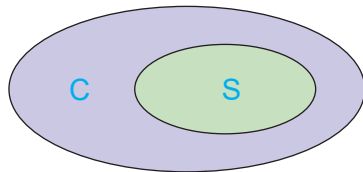
Subconjunts

Donat un conjunt C i una propietat p d'un element genèric de C , els elements de C que tenen aquesta propietat formen un nou conjunt S , anomenat **subconjunt** de C .

$$S = \{ x / x \in C, x \text{ verifica } p \}$$

Si el conjunt S és un subconjunt de C , se simbolitza amb $S \subset C$.

Aquesta proposició s'anomena **inclusió** de conjunts.



Exemples

- Els nombres *naturals* estan inclosos dins els nombres *enters*; aquests dins els *racionals*; aquests dins els *reals*; i, aquests dins els *complexos*.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

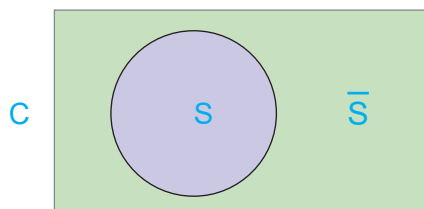
- El conjunt de les *vocals* està inclòs dins el conjunt de l'*alfabet*.

- Els divisors de 6 estan inclosos en el conjunt del divisors de 30.

$$\{1, 2, 3, 6\} \subset \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

a Conjunt complementari

Format pels elements de C que no pertanyen a S . $\bar{S} = \{ x \in C / x \notin S \}$



b Conjunt buit

És el conjunt que no té cap element i es representa amb el símbol $\emptyset$.

El conjunt dels nombres parells és un subconjunt dels nombres naturals.

Els parells tenen la propietat de ser divisibles per dos (al dividir per 2, el residu dona 0).

Els elements pertanyen a un conjunt: $5 \in \mathbb{N}$.

Els subconjunts estan inclosos dins un conjunt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$$S \subset C \iff \forall x \in S \Rightarrow x \in C$$

per a tot

Dos conjunts A i B són **comparables** $\iff A \subset B$ o $B \subset A$.

És a dir, un dels dos conjunts ha de ser subconjunt de l'altre.

Dos conjunts A i B es diuen **no comparables** si $A \not\subset B$ i $B \not\subset A$.

Això implica que A i B tenen, com a mínim, un element diferent a l'altre conjunt.

Dos conjunts són **disjunts** si no tenen cap element en comú.

Exemples de conjunts disjunts:

- S i $\bar{S}$.
- Els nombres naturals parells i els senars són disjunts.
- Dins els nombres $\mathbb{Z}$, els positius i els negatius.

Exemples de conjunts buits:

El conjunt dels nombres senars que són divisibles per 2.

5

Producte cartesià

El producte cartesià de $A \times B$ és el conjunt format per tots els **parells ordenats** d'elements (x, y) tals que $x \in A$ i $y \in B$.

El *nombre total de parells ordenats* que formen el producte cartesià de dos conjunts donats A i B és igual al producte del cardinal de A pel cardinal de B .

Els elements poden ser numèrics o no numèrics.

$$A \times B = \{ (x, y) / x \in A \text{ i } y \in B \}$$

$$\text{Si } A \subset F \text{ i } B \subset G \Leftrightarrow A \times B \subset F \times G$$

Si A i B són diferents, aleshores $A \times B \neq B \times A$ (no és commutatiu).

També pot definir-se el **producte cartesià de tres conjunts**, o **de n conjunts**, de manera anàloga al producte cartesià de dos conjunts.

Aleshores els parells ordenats s'anomenaran **ternes** o **n -tuples**, respectivament.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) / a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n \}$$

Per simplificar s'usa la notació

$$\prod_{i=1}^n A_i$$

Exemples

a Els resultats de llançar dues monedes.

$$M = \{ C, X \} \text{ on } C \equiv \text{cara}, X \equiv \text{creu}$$



$M \times M$	C	X
C	C,C	C,X
X	X,C	X,X

Taula cartesiana

b Els resultats de combinar colors i línies.

$$C = \{ \text{■}, \text{■}, \text{■}, \text{■} \}$$

$$L = \{ \text{—}, \text{...}, \text{=} \}$$

$L \times C$	■	■	■	■
—	—■	—■	—■	—■
...	...■	...■	...■	...■
=	=■	=■	=■	=■

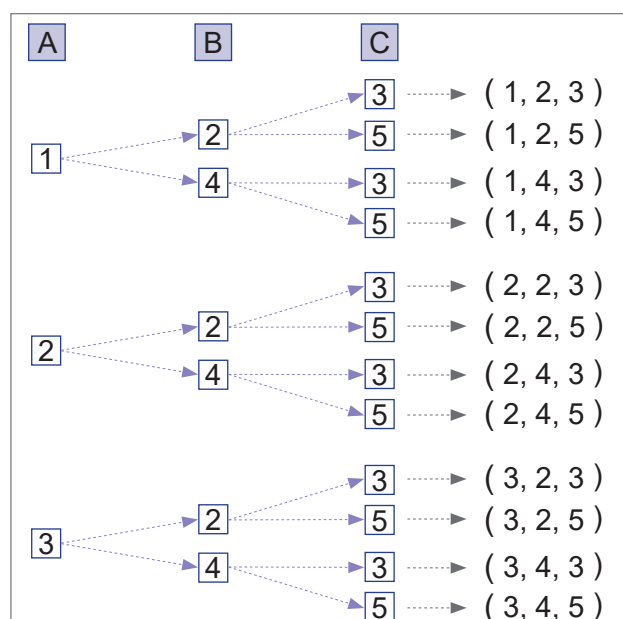
c Els resultats de combinar 3 conjunts de números.

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$B = \{ 2, 4 \}$$

$$C = \{ 3, 5 \}$$

Diagrama d'arbre



El diagrama d'arbre facilita la creació de totes les n -tuples.
En aquest exemple, ternes.

3

Operació. Llei de composició

1

S'anomena **operació binària** entre dos conjunts A i B amb valors a C , ambdós conjunts no buits, a tota aplicació del producte cartesià $A \times B$ al conjunt C ; per la qual a tot parell $(a, b) \in A \times B$, li correspon un element de C .

Les operacions binàries poden ser **internes** o **externes**.

Quan és **interna** ($A=B=C$) també s'anomena **llei de composició interna**.

$$f: A \times A \longrightarrow A$$

Les **externes** poden ser de tres tipus:

- **Llei de composició externa** quan ($B=C$ o $A=C$)

$$f: B \times A \longrightarrow A \quad (\text{per l'esquerra})$$

$$f: A \times B \longrightarrow A \quad (\text{per la dreta})$$

- Quan $A=B \neq C \Rightarrow f: A \times A \longrightarrow C$
- Quan $A \neq B \neq C \Rightarrow f: A \times B \longrightarrow C$

$$f: A \times B \longrightarrow C$$

$$(a, b) \longmapsto c = f(a, b)$$

$f(a, b)$ es pot escriure com afb i es llegeix com a operat amb b mitjançant f .

Suma de vectors en el pla

$$+: V_2 \times V_2 \longrightarrow V_2$$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

Multiplicació d'un vector per un nombre

$$\cdot: \mathbb{R} \times V_2 \longrightarrow V_2$$

$$(k, \vec{v}) \longmapsto k \cdot \vec{v} = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)$$

Producte escalar

$$\cdot: V_3 \times V_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\widehat{(\vec{v}, \vec{w})})$$

2

Llei de composició interna

(A, f) representarà un conjunt A proveït d'una llei interna f .

Es diu que la llei de *composició interna* està **mal definida** quan no tots els parells de $A \times A$ tenen una imatge en A .

Quan està *mal definida*, també, es pot dir que és **oberta**, **inestable** o que **no té propietat de cloenda**.

Quan està *ben definida*, també, es pot dir que és **tancada**, **estable** o que té **propietat de cloenda**.

Exemple

$$\top: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(a, b) \longmapsto a \top b = 3a + b/2$$

Aquesta operació està *mal definida* perquè quan b sigui senar, el resultat final no serà un nombre natural.

En canvi, estaria ben definida a $\mathbb{Q}$ o a $\mathbb{R}$.

Les *lleis de composició interna* es poden descriure de dues maneres:

- Per **extensió**

Mitjançant un criteri qualsevol definit en el conjunt A , que permeti associar elements de $A \times A$ amb elements de A .

Quan A és un conjunt finit, es podrà representar amb una taula de doble entrada.

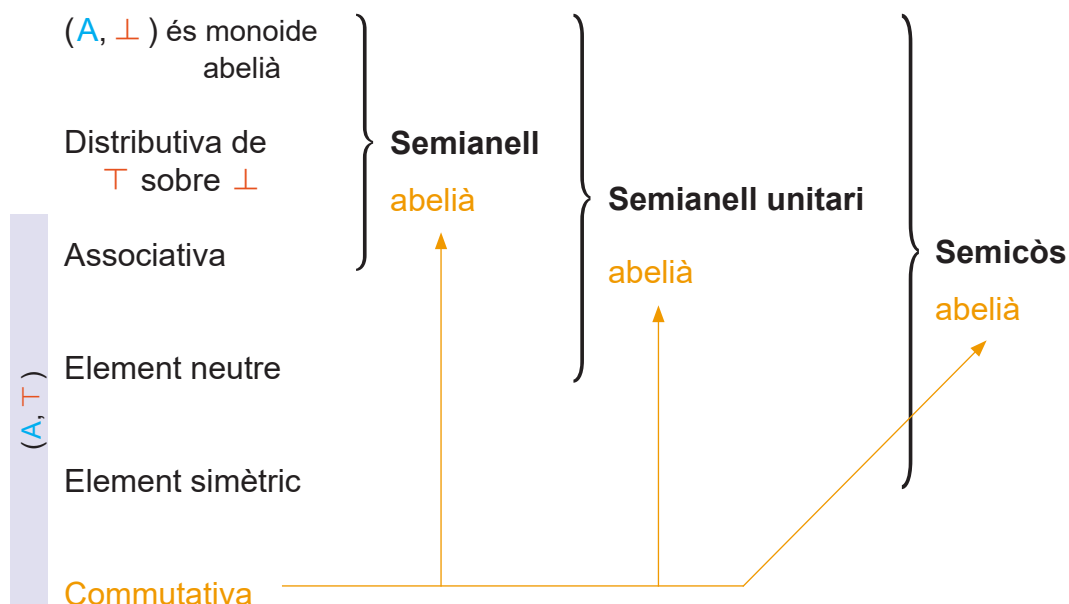
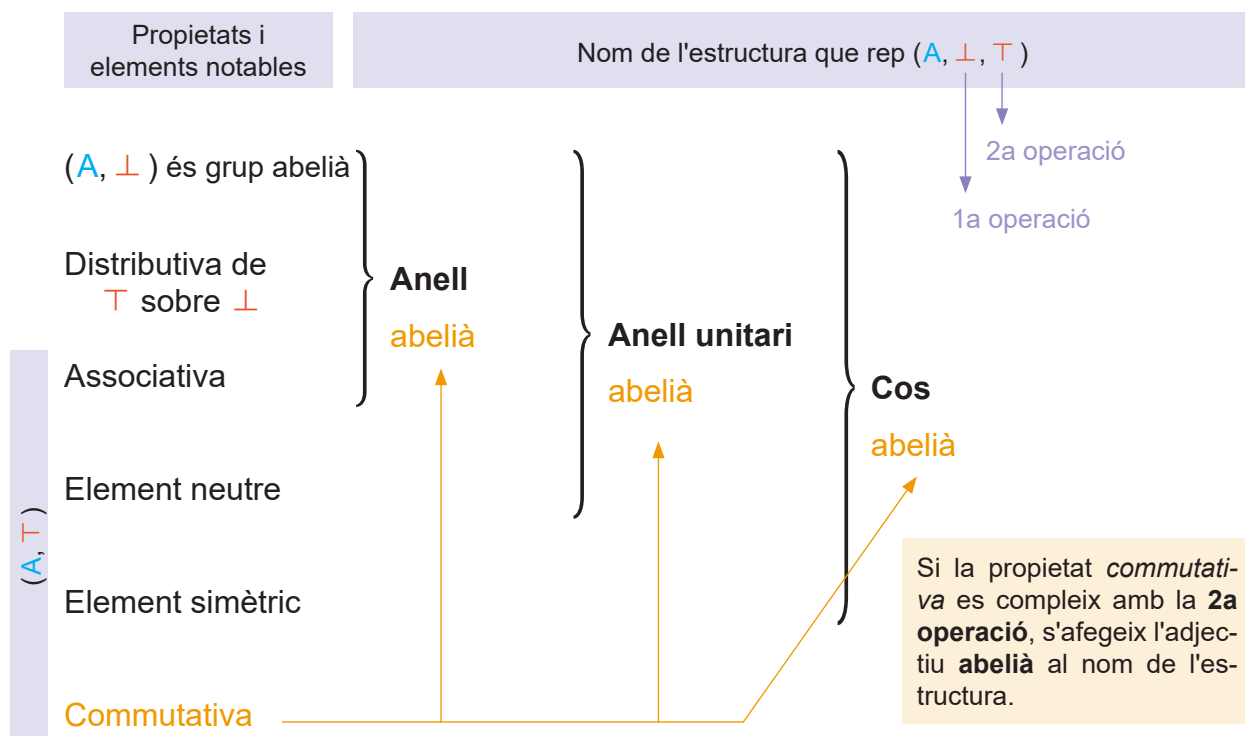
- Per **comprensió**

Mitjançant una expressió o fórmula matemàtica que permeti obtenir totes les possibilitats que indiqui l'operació.

$$\perp: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto a \perp b = 5a + 2b$$

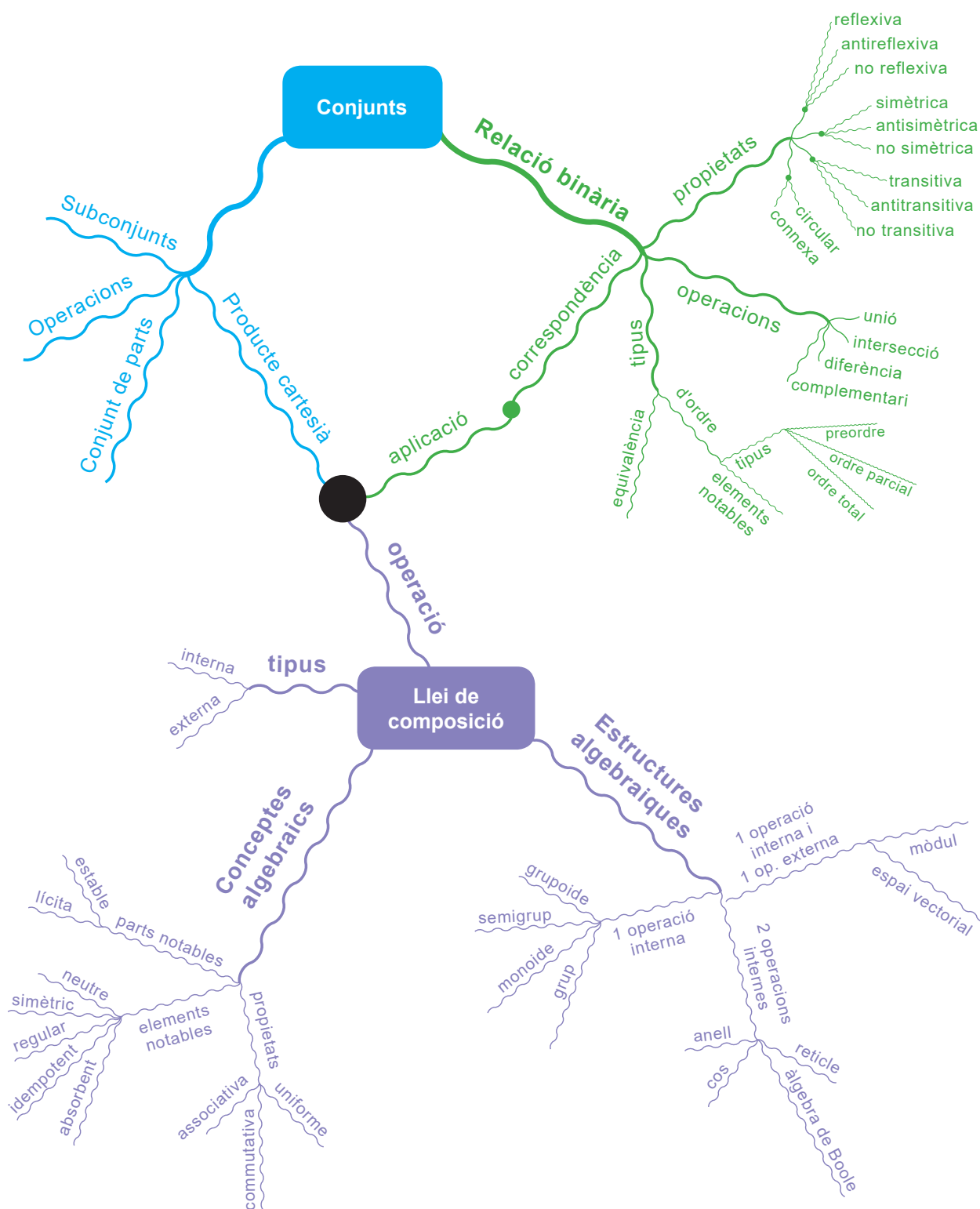
3 Estructures amb dues operacions internes



En aquest segon esquema, $(A, \perp)$ no té la propietat *simètrica* i, per això, s'afegeix el prefix *semi* a les estructures d'*anell* i de *cos*.

Si $(A, \perp, \top)$ és *semicòs abelià* i, també, té la *distributiva* de $\perp$ respecte $\top$, $(A, \top, \perp)$ serà *anell abelià*.

Els nombres amb les operacions $+$ i $\times$ només tenen la propietat *distributiva* de la $\times$ respecte a la $+$. En canvi, $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ amb les operacions $\cup$ i $\cap$ té les dues *distributives*.

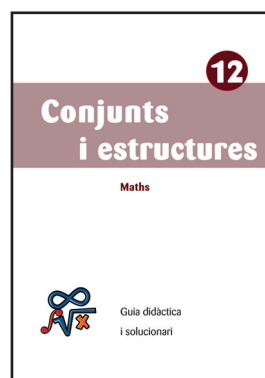
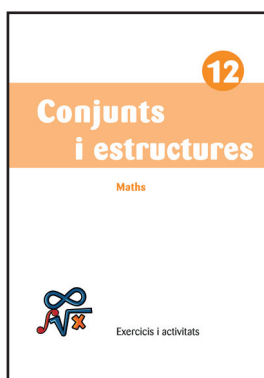
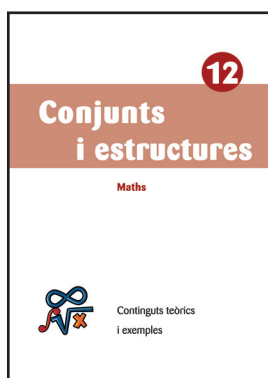




Continguts

- | | |
|------------------------|-------------------------------|
| 1 Els nombres | 8 Derivades i aplicacions |
| 2 Trigonometria | 9 Integrals |
| 3 Geometria al pla | 10 Estadística i probabilitat |
| 4 Àlgebra | 11 Resolució de problemes |
| 5 Geometria a l'espai | 12 Conjunts i estructures |
| 6 Funcions | 13 Matemàtica financera |
| 7 Límits i continuïtat | 14 Programació lineal |

Cada una d'aquestes temàtiques presenta tres dossiers: un de teoria i exemples, un altre d'exercicis i activitats i, un tercer, amb la guia didàctica i solucionari.



Disponibles en format imprès a preu gairebé de cost.

Amb els beneficis s'anirà desenvolupant tot el projecte altruista Maths, especialment, els **multimèdia interactius**, d'accés lliure.

Una vegada aquests multimèdia estiguin acabats, els dossiers de teoria també estaran disponibles en PDF gratuït.

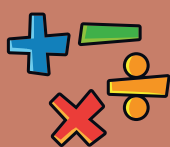
Disponibles **gratuïtament** des de la seva publicació en format PDF.

Amb la col·laboració altruista del professorat, aportant suggeriments, exercicis i activitats, s'aniran realitzant, actualitzant i ampliant els dossiers d'exercicis i activitats i les guies didàctiques.

En cada exercici i activitat se citarà l'autoria del professorat i/o centre educatiu col·laborador que ens l'hagi proporcionat.

Per a ampliar la informació del projecte i descarregar els PDF gratuïts, visiteu www.balagium.com

Maths



Primària
(6 - 12 anys)



Secundària
(12 - 16 anys)



Batxillerat
(16 - 18 anys)

La col·lecció Maths està formada per una sèrie de dossiers per a les etapes de primària, secundària i batxillerat.

Aquests materials pretenen, entre altres objectius, fomentar l'interès per les matemàtiques, millorar la capacitat de raonament i la resolució de problemes, potenciar l'agilitat mental, descobrir el goig intel·lectual.

En els dossiers de continguts teòrics s'utilitza una metodologia molt visual, estructurada i senzilla per afavorir-ne la comprensió. En cada dossier s'agrupen els continguts teòrics corresponents a tota l'etapa escolar. Això possibilita una consulta ràpida dels seus continguts, redueix el temps per al seu aprenentatge i així tenir-ne més per a treballar activitats competencials.

En els dossiers d'exercicis i activitats, se'n presenten tres tipologies diferents: els habituals per treballar cada concepte, miniactivitats transversals basades en la resolució de problemes relacionats amb la vida quotidiana i projectes per afavorir un aprenentatge competencial. Cada una d'aquestes tipologies permet atendre la diversitat de l'alumnat per tal de motivar-lo i fomentar la seva autoestima.

Aquests dossiers es poden reutilitzar i redueixen significament els costos econòmics dels llibres escolars.

Codificació
continguts



Més bàsic



Més complex



BALÀGIUM
editors



9 788417 431075